Mathematisches Institut der Universität München
Prof. Dr. Georg Tamme, Thomas Beekenkamp

SS 17
Blatt 3

Lösungen zu den Tutoriumsaufgaben

T1. Betrachten Sie die Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$:
(i) $a(x,y) = xy$,
(ii) $b(x,y) = (x-1)(y-1)$,
(iii) $c(x,y) = y - x^2$,
(iv) $d(x,y) = x - y^2$,

(a) Skizzieren Sie die Niveaumengen der Funktionen.

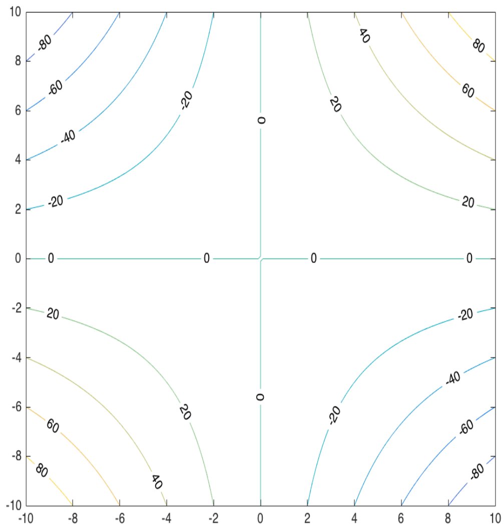
Lösung:

(i)

Fall $c = 0$:
$a(x,y) = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0) \vee (x = 0 \wedge y = 0)$,
$\Rightarrow a^{-1}(0)$ entspricht also den Achsen des Koordinatensystems.

Fall $c \neq 0$:
$a(x,y) = c \Leftrightarrow xy = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{x}$

Die Niveaumengen sehen also wie folgt aus:

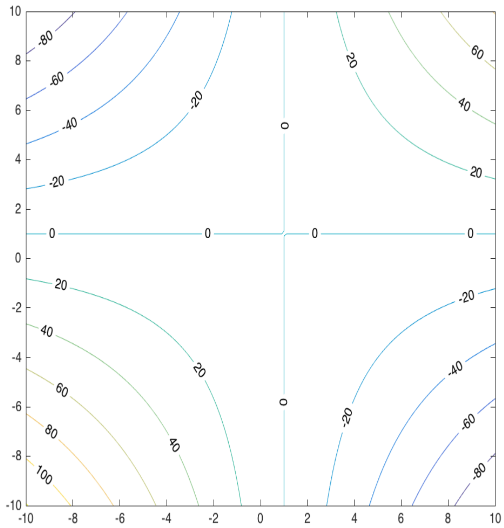


(ii)

Fall $c = 0$:
$b(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \lor y = 1) \lor (x = 1 \land y = 1)$,
$\Rightarrow b^{-1}(0)$ entspricht also den Geraden $x = 1$ und$y = 1$.

Fall $c \neq 0$:
$b(x, y) = c \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = c \Leftrightarrow y = \frac{c+x-1}{x-1}$

Die Niveaumengen sehen wie folgt aus:

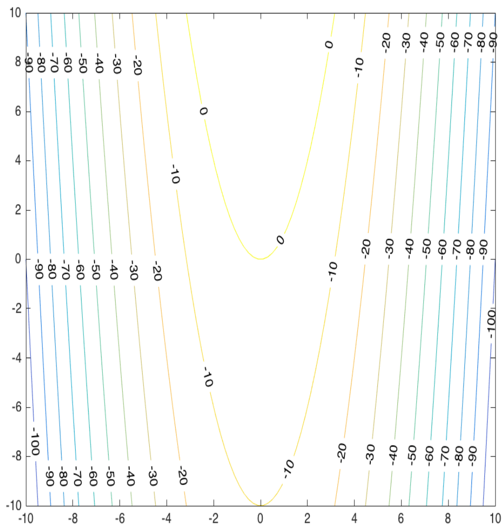


(iii)

Fall $c = 0$:
$c(x, y) = 0 \Leftrightarrow y - x^2 = 0 \Leftrightarrow y = x^2$,
$\Rightarrow c^{-1}(0)$ entspricht also einer Normalparabel.

Fall $c \neq 0$:
$c(x, y) = c \Leftrightarrow y - x^2 = c \Leftrightarrow y = x^2 + c$
$\Rightarrow$ Die Niveaumengen sind also Normalparabeln, welche um eine y-Achsenabschnitt c nach oben bzw. unten verschoben sind.

Die Niveaumengen sehen wie folgt aus:

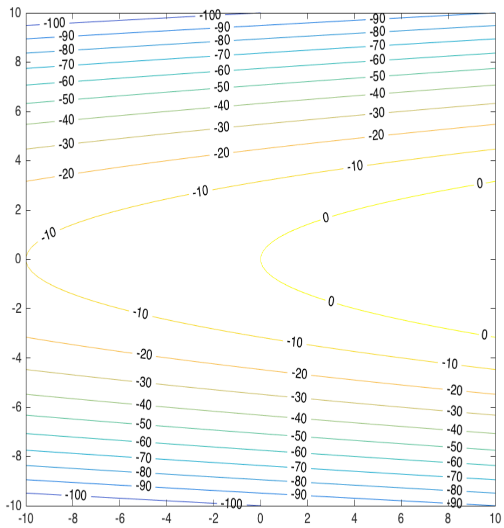


(iv)

Fall $c = 0$:
$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$,
$\Rightarrow d^{-1}(0)$ entspricht also der Vereinigung der positiven und negativen Wurzelfunktion.

Fall $c \neq 0$:
$d(x, y) = c \Leftrightarrow x - y^2 = c \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x - c}$
$\Rightarrow$ Die Niveaumengen sind also Wurzelfunktionen, welche um eine x-Achsenabschnitt c nach links bzw. rechts verschoben sind.

Die Niveaumengen sehen wie folgt aus:



(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktionen an den Stellen x, y

(i)

$\frac{\partial}{\partial x} a(x, y) = y,$

$\frac{\partial}{\partial y} a(x, y) = x,$

(ii)

$\frac{\partial}{\partial x} b(x, y) = y - 1,$

$\frac{\partial}{\partial x} b(x, y) = x - 1,$

(iii)

$\frac{\partial}{\partial x} c(x, y) = -2x,$

$\frac{\partial}{\partial x} c(x, y) = 1,$

(iv)

$\frac{\partial}{\partial x} d(x, y) = 1,$

$\frac{\partial}{\partial x} d(x, y) = -2y,$

T2. Welche der folgenden Teilmengen A des metrischen Raums X sind kompakt?

(a) $A = [0,1] \times [0,1] \subset X = \mathbb{R}^2$

Lösung:
Wir wissen $[0,1]$ ist abgeschlossen und beschränkt diese Eigenschaften bleiben unter Verwendung des Kartesischen-Produktes erhalten. Mit dem Satz von Heine-Borel erhalten wir also, dass $[0,1] \times [0,1]$ kompakt ist.

(b) $A = \{\frac{1}{k} \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}\} \subset X = \mathbb{R}$

Lösung:
Nach dem letzten Tutorium wissen wir, dass $\bar{A} = A \cup \{0\}$ gilt. Damit können wir folgern, dass A nicht abgeschlossen ist, also folgt mit dem Satz von Heine-Borel, dass A nicht kompakt ist.

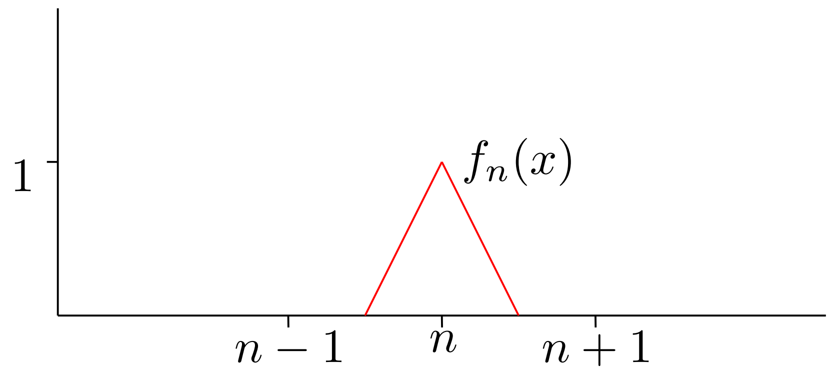
(c) $A = \mathbb{N} \subset X = \mathbb{R}$

Lösung:
Wir betrachten die Folge $(n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ diese Folge divergiert und ebenso divergiert jede Teilfolge von ihr, da für jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gilt, dass $a_{n_k} \geq k$. Für $k \to \infty$ folgt also, dass $(a_{n_k})_k \to \infty$. Mit dem Satz über Folgenkompaktheit können wir also folgern, dass A nicht kompakt ist.

(d) $A = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \|f\|_\infty \leq 1\} \subset X = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Lösung:
Betrachten Sie die Folge $(f_n) \subset A$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + 2(x-n) & \text{wenn } x \in \left[n - \frac{1}{2}, n\right], \\ 1 + 2(n-x) & \text{wenn } x \in \left[n, n + \frac{1}{2}\right], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Der Abstand zwischen zwei Elementen der Folge ist immer 1. Deshalb ist keine Teilfoge von (f_n) eine Cauchy Folge, und deswegen auch nicht konvergent. Also es gibt eine Folge in A deren jede Teilfolge nicht konvergent ist. Es folgt dass A nicht kompakt ist.

T3. Sei X eine Menge. Wir versehen X mit der diskreten Metrik. Beschreiben Sie die kompakten Teilmengen von X.

Lösung:
Aus dem letzten Tutorium wissen wir, dass die Singletons, d.h $\{x\} \subset X$ offen sind. Wir betrachten nun eine beliebige Teilmenge A von X, diese besitzt dann folgende Darstellung:

$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$.

Diese Vereinigung ist nun ebenfalls eine offene Menge, welche A überdeckt. Damit nun A nach Satz 1.43 kompakt ist, muss es zu dieser Überdeckung eine offene Teilüberdeckung gibt. Diese existiert allerdings nur, wenn es sich bei der Teilmenge A um eine endliche Menge handelt.
Damit können wir nun folgern, dass die kompakten Teilmengen in X, ausgestattet mit der diskreten Metrik, diejenigen sind, deren Kardinalität endlich ist.